

数学

立足旋转动态构图 破解几何综合难题

北京市朝阳区芳草地国际学校富力分校 谷宁陈

几何综合问题是初中学考的核心考点,这类题目不仅考查图形变换的基础性质,更考查考生能否以运动变化的视角观察图形、发现数量关系,从而添加辅助线构造图形,实现边与角的转化。

这类问题往往条件隐蔽、设问灵活,一些考生对此无从下手,究其问题可能在于无法从“共端点、等线段”的条件中联想到旋转构图,面对分散的线段和角度不知如何转化,缺乏添加辅助线的思路等。下面,笔者结合往年学考试题,从旋转的动态视角出发,帮助考生学会如何通过构图破解难点,总结解题策略。

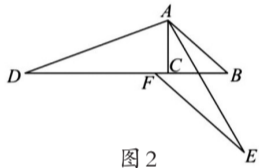
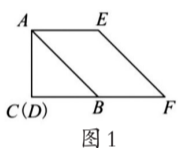
一、例题解析

【例1】(2025年北京初中学考数学第27题)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=\alpha$,点 D 在射线 BC 上,连接 AD ,将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ-2\alpha$ 得到线段 AE (点 E 不在直线 AB 上),过点 E 作 $EF\parallel AB$,交直线 BC 于点 F 。

(1)如图1, $\alpha=45^\circ$,点 D 与点 C 重合,求证: $BF=AC$;

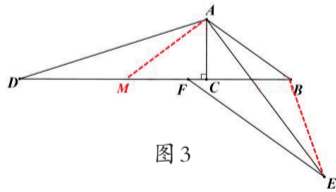
(2)如图2,点 D, F 都在 BC 的延长线上,用等式表示 DF 与 BC 的数量关系,并证明。



【分析】以下重点分析第二问。本题给出的关键条件是“线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ-2\alpha$ 得到线段 AE ”,旋转角是 $180^\circ-2\alpha$,这个角度与 α 存在确定的关系;又已知 $EF\parallel AB$ 的平行关系,这是沟通角之间等量关系的桥梁。那么,如何才能找到线段 DF 与 BC 之间的数量关系?

思路一:由旋转找等腰

考生可以利用旋转角是 $180^\circ-2\alpha$ 这个条件,它与等腰三角形的顶角公式完全相同,这提示考生图中很可能隐藏着一个底角为 α 的等腰三角形。考虑到 $\angle ABC=\alpha$,考生可以主动创造一个以 $\angle ABC$ 为底角的等腰三角形,同时也能构造出线段 BC 的2倍。



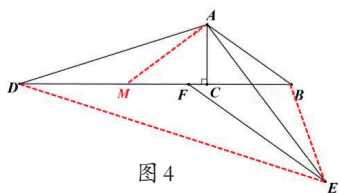
如图3,考生可以在 BC 延长线上截取 $CM=CB$,连接 AM ,这样 $\triangle ABM$ 就是底角为 α 、顶角 $180^\circ-2\alpha$ 的等腰三角形。为什么截取 $CM=CB$?因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 AC 是线段 BM 的中垂线,从而 $AB=AM$,且 $\angle BAM$ 恰好等于 $180^\circ-2\alpha$ 。这样就能把旋转角与等腰三角形的顶角对应起来。

结合已知条件中 $AD=AE$ 这两条共端点的等线段,可以构造出 $\triangle ABE\cong\triangle AMD$ 。

证明 $DF=2BC$ 即是要证明 $DF=BM$,其中线段 MF 为公共部分,考生只要证明 $DM=BF$ 即可。由 $\triangle ABE\cong\triangle AMD$ 可知 $DM=BE$,因此解决问题的最后一个难点是证明 $BF=BE$ 。此时,考生利用已知条件给出的平行线 $EF\parallel AB$,即可将角进行转化,从而证明 $\triangle BFE$ 是一个等腰三角形。

思路二:由旋转找相似

在思路一的基础之上,考生可以构造出等腰 $\triangle ADE$ 与等腰 $\triangle ABM$ 。 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABM$ 是相似三角形,如图4。



由 $\triangle ADE\sim\triangle ABM$,可以得到 $\frac{AD}{DE}=\frac{AM}{MB}$;由于 $MB=2BC$,如果还能得到 $\frac{AD}{DE}=\frac{AM}{DF}$,那么 $DF=GB=2BC$,于是问题就转化为证明 $\triangle ADM\sim\triangle DEF$ 。

通过题目中旋转的条件,考生可以设 $\angle DAM=\angle EAB=\beta$,又因为 $EF\parallel AB$,可得 $\angle BAE=\angle AEF=\beta$,可以证明 $\angle ADM=\angle DEF=\alpha-\beta$,再结合 $\angle AMD=\angle DFE=180^\circ-\alpha$,即可完成相似证明。这种解法用相似代替全等,对角度关系的挖掘要求更高。

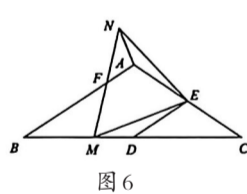
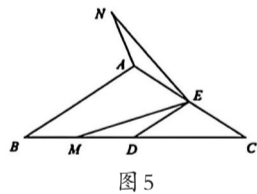
【总结】在利用条件中的旋转进行构图时,考生要先识别旋转角的结构特征,当旋转角呈现 $180^\circ-2\alpha$ 、 $90^\circ+\alpha$ 、 2α 等形式时,可以联想等腰三角形、直角三角形或角平分线等基本图形;同时,考生还可以尝试对图中其他关键线段进行同样的旋转,构造等腰三角形,从而利用全等三角形或者相似三角形发现线段之间的数量关系,并结合题目给出的与角有关的重要条件(如平行线等),利用角的转化,完成相似三角形或全等三角形的证明。

二、题型拓展

【例2】在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle B=\alpha$ ($0^\circ<\alpha<45^\circ$), D, E 分别是 BC, AC 的中点, M 是线段 BD 上的动点(不与 B, D 重合),连接 DE, EM ,将线段 EM 绕点 E 顺时针旋转 2α 得到线段 EN ,连接 AN 。

(1)如图5,求证: $AN=DM$;

(2)如图6,连接 MN 交 AB 于点 F ,当 $MF=NF$ 时,用等式表示线段 FB 与 FA 的数量关系,并证明。

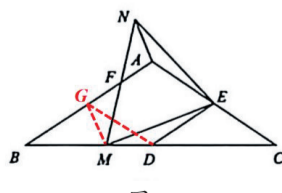


【分析】针对第一问,考生要抓住旋转角的关联性。题目中给出了一个关键的信息,即 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,因此 $DE\parallel AB$,从而 $\angle EDC=\angle B=\angle C=\alpha$, $\angle AED=2\alpha$ 。而旋转角 $\angle MEN$ 恰好也是 2α ,于是 $\angle AED=\angle MEN$ 。这两个相等的角以点 E 为公共顶点,且构成旋转全等模型的基本框架—— $\triangle AEN$ 可以视为 $\triangle DEM$ 绕点 E 旋转 2α 得到。因此, $\triangle AEN\cong\triangle DEM$,从而 $AN=DM$ 。

针对第二问,可以有两个思路。

思路一:

由于第一问已经证明 $\triangle AEN\cong\triangle DEM$,并证明了 $AN=DM$,这个结论在第二问中仍然成立,且 $\angle EAN=\angle EDM$ 。此外,由 $DE\parallel AB$ 还可得到 $\angle BAC=180^\circ-2\alpha$ (可由 $\triangle ABC$ 内角和推出)。由 $MF=NF$ 可得点 F 是 MN 的中点,利用中点,考生通常可以通过倍长中线或者构造中位线来进行线段的转化。



因此,过点 M 作 $MG\parallel AN$,交 AB 于点 G ,连接 GD 。由平行线性质的可得 $\angle GMF=\angle ANF$,结合点 F 是

MN 中点,可证 $\triangle AFN\cong\triangle GFM$,从而 $AN=GM$ 。于是 $GM=DM$,即 $\triangle DMG$ 是等腰三角形。

此时,考生可以利用图形中的角度关系进行推导。由 $DE\parallel AB$ 可得 $\angle EDM=180^\circ-\alpha$,而 $\angle EAN=\angle EDM$,所以 $\angle EAN=180^\circ-\alpha$ 。观察顶点 A 处的三个角: $\angle NAF$ 、 $\angle BAC$ 和 $\angle EAN$,它们的和为 360° 。已知 $\angle BAC=180^\circ-2\alpha$, $\angle EAN=180^\circ-\alpha$,因此考生可以求出 $\angle NAF=360^\circ-(180^\circ-2\alpha+180^\circ-\alpha)=3\alpha$ 。

再由 $MG\parallel AN$ 可得 $\angle MGF=\angle NAF=3\alpha$ 。 $\angle MGF$ 是 $\triangle BGM$ 的外角,所以 $\angle BMG=\angle MGF-\angle B=3\alpha-\alpha=2\alpha$ 。因此,对于等腰 $\triangle DMG$ 而言,底角为 α ,从而 $\angle GDM=\alpha=\angle C$,因此 $DG\parallel AC$ 。由于 D 是 BC 中点, $DG\parallel AC$,所以点 G 是 AB 的中点,而点 F 是 AG 的中点,因此 $FB=3FA$ 。

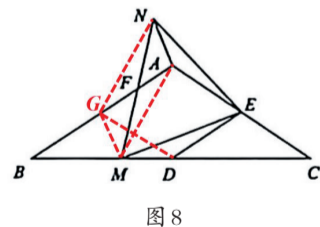
【总结】这种解法从第一问的旋转全等出发,顺势利用中点条件构造平行线,将分散的边角关系集中到 $\triangle DMG$ 和 $\triangle BGM$ 中,通过角度计算逐层推进,逐步完成逻辑推理。

思路二:

旋转的本质是图形的运动变换,在旋转中,对应线段相等且夹角等于旋转角。平行四边形与旋转有着天然的关联——平行四边形可以看作是通过中心对称(即旋转 180°)得到的图形。

考生可以将旋转视角延伸到第二问:既然点 F 是 MN 中点,则考虑以 F 为对称中心构造中心对称图形。在 AB 上取一点 G ,使 $FG=FA$,连接 GM, GN, GD ,则四边形 $AMGN$ 是平行四边形,从而 $GM=AN, GN=AM$ 。

由于第一问已经证明 $\triangle AEN\cong\triangle DEM$,并证明了 $AN=DM$,且 AN 与 DM 的夹角等于旋转角 2α 。考生可以得到 $GM=AN=DM$,即 $\triangle DMG$ 是等腰三角形;同时,由 $DE\parallel AB$ 及中位线性质的可得四边形 $ABED$ 是梯形,进一步可证四边形 $AGDE$ 是平行四边形,即可证明点 G 为 AB 中点,进而可得出 FB 与 FA 的数量关系。



【总结】这种解法将旋转与中心对称(旋转 180°)一起来,利用中点构造平行四边形,将分散的条件集中到等腰三角形中,是旋转思想的一种延伸运用。

复习建议

在复习几何综合问题时,考生要立足几何变换的核心本质,将旋转等图形变换的性质理解与几何基本图形、核心定理融会贯通,构建系统的几何知识体系。日常复习中,考生要以往年学考试题和各区“一模”典型考题为抓手,聚焦以旋转为载体的综合题型,不局限于单一的构图技巧,而是注重培养从已知条件中提炼核心几何特征的能力。面对几何综合问题,考生一定要保持良好的解题心态,先厘清题干中的核心条件与待证结论的关联,再结合全等三角形、等腰三角形、中点等重要条件,找到解题切入点,逐步提升对复杂图形的识图能力和动态构图思维,使几何综合题的解题思路形成自然的逻辑反射。