数学

分步拆解几何综合题

北京市陈经纶中学 胡宝田

几何综合题是初中学考压轴题之一，也是考生现阶段提分的关键题型。此类题目不仅考查考生对基础知识的掌握程度，更关注其在复杂图形中识别基本图形(模型)、联系解题方法、构造全等或相似三角形以及转化线段的能力。

几何综合题通常采用“步步递进”的设问方式，即第一问是考基础的几何性质，一般为后面的问题作铺垫；第二问是中档综合题，承上启下；第三问则考查变式应用，压轴拔高。

解答几何综合题时，考生通常有三大解题难点——图形变换(旋转/对称)、复杂的几何关系(线段数量关系)以及构造辅助线，一些考生常会卡在如何从条件联想到辅助线的作法等问题上。对此，考生要重视题目中各几何元素间的联系，正确快速关联解题方法，并关注上一问结论的暗示和铺垫作用，这往往有助于考生把握解题方向、寻找解题思路。下面，笔者结合典型例题，为考生拆解一下几何综合题的核心解题策略。

几何综合题解题痛点分析

痛点1：找不到辅助线，解题卡在起点

面对最后一问的复杂图形时，部分考生因“逆向思维不足”和“模型识别不清”不知从何入手。对此，考生切忌慌张，要牢记“补、连、延、作”四字口诀。“补”是补全图形；“连”是连接两个点，使其形成一条线段；“延”是把现有的线段延长；“作”是包括作高、作平行线、作角平分线、作垂线、作中线等特殊线段。

痛点2：不会转化条件，胡乱套用定理

部分考生不能将题目中的中点、角平分线、垂直、旋转等条件有效“翻译”为可用的几何定理或图形关系。对此，考生可有意识地将条件转化为证明三角形全等、相似或识别特殊三角形(如等腰、直角三角形)的依据。

痛点3：书写不规范，会做也拿不到满分

一些考生证明过程跳步严重，漏写关键依据，存在逻辑链断裂等问题，导致解题时出现“会而不对，对而不全”的情况。对此，考生要严格按照几何证明题的作答步骤规范答题，避免被扣“过程分”。

痛点4：分类讨论漏解

面对动点、位置变化或图形形状不确定时，部分考生往往只写出一种情况。对此，考生要先判断题目是否存在“位置不确定”的情况，再至少画出两种情况的图形，最后检验每种情况下的结果是否都成立。

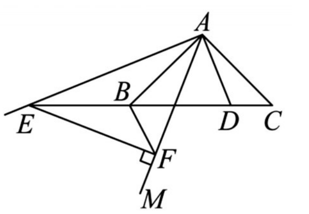
痛点5：面对几何动点问题，动态分析能力弱

面对融入动点的问题，部分考生难以分析出运动过程及临界状态。对此，考生要先“定”后“动”抓运动本质，明确动点轨迹；再分类讨论，避免漏解，应多画几个不同位置的图形，务必找到“起始点”“临界点”和“终止点”，并转化模型找到特殊位置(中点、垂直、相切、重合、最值点等)。

精选真题解析

以常见的“中点+旋转+线段关系”试题为例，笔者为考生解析如何运用上述策略解题。

【例】(2026年1月西城区初三期末考题) 在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点D是边BC上一点，点E在CB的延长线上，且$BE=BD$. 将射线AE绕点A逆时针旋转45°得到射线AM，作$EF\perp AM$，垂足为F，连接AD，BF.



(1)如右图，当$BD=BA$，时，求$\angle BEF$的度数；

(2)如右图，用等式表示线段AD与BF的数量关系，并证明。

【分析】 本题考查等腰三角形的判定与性质、旋转的性质、全等三角形的判定与性质、三角形外角的定义及性质等知识点。考生熟练掌握以上知识点并能灵活运用是顺利解题的关键。

(1)考生由等腰直角三角形的性质可得$\angle ABD=45°$，结合题意可得$BE=BA$，再由等边对等角并结合三角形外角的定义及性质得出$\angle BAE=\angle BEA=22.5°$，由旋转的性质可得$\angle EAM=45°$，求出$\angle EAM=\angle AEF=45°$，即可得出结果。

(2)作$GF\perp BF$，$GF=BF$，连BG，EG. 由等腰直角三角形的性质，考生可得$BG=\sqrt{2}BF$，再证明$\triangle AFB\cong\triangle EFG$，得出$AB=EG$，$\angle BAF=\angle GEF$；再证明$\triangle BEG\cong\triangle DBA$，得出$BG=AD$，即可得出结果。

【分步拆解】解决“辅助线+条件转化”痛点

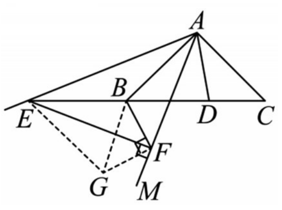
步骤1：抓关键词，锁定突破口(不盲目画图)

题目出现“等腰直角+中点+旋转”，考生应立刻想到“中点”可连接中线，“旋转”可联想到对应边等、对应角和旋转角等。

题目出现“等腰直角、旋转”关键词，考生应首先观察到$\triangle ABC$是等腰直角三角形，想到“等腰直角三角形的性质”。其次，射线AE绕点A逆时针旋转45°得到射线AM，再作$EF\perp AM$于F，由旋转：$\angle EAF=45°$，$EF\perp AM$，$\therefore\angle AFE=90°$，$\triangle AEF$为等腰直角三角形，$\angle AEF=45°$。再由主题干的$BE=BD$，结合第一问的条件$BD=BA$便可推出$\triangle ABD$、$\triangle ABE$都是等腰三角形。另外$\angle ABC$是等腰$\triangle ABE$的外角，可推出$\angle BEA=22.5°\therefore\angle BEF=\angle AEF-\angle BEA=45°-22.5°=22.5°$。

步骤2：必做辅助线

如右图作$GF\perp BF$，$GF=BF$，连接BG，EG，构造等腰直角三角形；证明两次全等$\triangle AFB\cong\triangle EFG$(SAS)，$\triangle BEG\cong\triangle DBA$(SAS).



步骤3：调动过往解题经验

构造全等后，考生可利用全等三角形性质，得出对应边相等$AD=BG$，再由等腰直角三角形的三边关系可得$BG=\sqrt{2}BF$，从而得到$AD=\sqrt{2}BF$。

通用解题思路及步骤

1.读题标图，扩大已知

标等边：AB=AC、折叠边、中点分边

标等角：角分线、平行线、折叠角、余角

标特殊图形：直角三角形、等腰三角形、等边三角形、平行四边形

2.发现关键信息点

见中点：连中线、倍长中线、构造中位线，三线合一

见对称：连对应点，得垂直平分线

见旋转：先列三要素，即对应边等、对应角等、共顶点

3.联想基本解题方法

4.强化“几何直觉”，从结论反推，尝试逆向思维

问自己：要证线段相等通常用全等，那这对全等三角形在哪里？要证线段平方和通常用勾股定理，那直角在哪里？

利用设问：如果第一问让考生证明一个结论，但第二问条件变了，那么第一问的结论往往在第二问依然成立，或者第一问的证明方法可以迁移到第二问。

备考实操建议

面对几何综合题，考生备考的核心在于将复杂问题拆解为若干个简单的基本模型，并将已掌握的方法迁移到新情境中。具体建议如下：

精练和反思。考生每天可精选1道综合题，重点练习“分析思路+构造辅助线”，不必写完整过程，但要深入反思“为何这样添加辅助线”。

重点要突破。考生要集中精力攻克薄弱环节，如不会画辅助线、不会转化条件、书写丢分等。

作答讲策略：考生要确保第一问必得分，第二问“抢到分”，第三问应画出关键辅助线并写出主要解题思路，争取拿到步骤分。

■ 责编/邓 菡 版式/罗京京 热线/59102870 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn