首都教育 高质量发展·高招

数学

例说函数与方程思想在解析几何的运用

北京理工大学附属中学 金永涛

平面解析几何是借助坐标法，将几何问题转化为代数形式，用代数推理和数学运算对问题给出解答.在方法上主要考查考生转化与化归、函数与方程和数形结合等思想，通过解决问题提升数学运算能力、逻辑推理能力和直观想象能力，培养理性思维和严谨治学的态度.

解析几何中的一类存在性问题，问题的结果最终指向特定状态下的解，实质上是一个常量问题.考生思考和解答这样的题目，重点是应用方程思想，根据题目条件引入未知数(或未知量)，构建出与未知量个数相同的等量关系式(即方程或方程组)，通过解方程对问题给出解答.下面，以一个解析几何题目为例，梳理函数与方程思想在解析几何问题中的系统应用与思考.

典例剖析

【题目】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆的左顶点 A 在圆 $O: x^2+y^2=16$ 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 P 为椭圆 C 上不同于点 A 的点，直线 AP 与圆 O 的另一个交点为 Q.是否存在点 P，使得 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

【分析】题目中，点 P 是椭圆上(除点 A 外)的动点，随着点 P 的运动，问题描述的是一个变化的过程，这就需要根据条件选定自变量刻画目标函数.通过分析可知，$\frac{|PQ|}{|AP|}$ 是一个关于点 P 的函数，其中满足 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$ 的应该是有限个确定的点 P，也就是说，结果最终指向的是一个常量问题，可以借助方程思想进行解答，解答的核心就是根据条件设置未知量，构建方程进行解答.

1. 利用直线斜率刻画目标函数

最容易想到的是以直线 AP 的斜率为自变量，刻画目标函数 $\frac{|PQ|}{|AP|}$.首先由题目可求得，椭圆 C 的标准方程为 $C: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，作出曲线图形(图1).

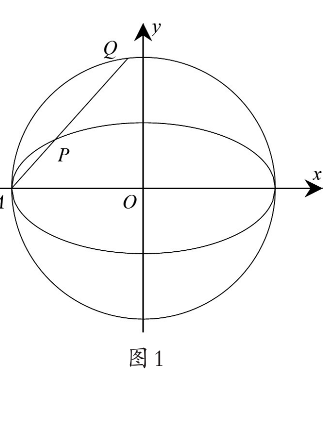

图1

思路1: 假设存在点 P，设 AP 的方程为 $y=k(x+4)$，此时只有一个未知量 k，利用方程思想，只需得到关于 k 的一个方程即可求出它的值，进而求解点 P 的坐标.

$\begin{cases} y=k(x+4) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得：$(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-16=0$，

由 $\Delta>0$，得：$k\neq0$，由韦达定理，则 $x_p+(-4)=\frac{-32k^2}{4k^2+1}$，$-4x_p=\frac{64k^2-16}{4k^2+1}$，

得：$x_p=\frac{4-16k^2}{4k^2+1}$，进而 $|AP|=\frac{8\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，

由圆心 O 到直线 AP 的距离为 $d=\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}}$，可得：$|AQ|=2\sqrt{16-d^2}=2\sqrt{\frac{16}{1+k^2}}=\frac{8}{\sqrt{1+k^2}}$，

由 $\frac{|PQ|}{|AP|}=\frac{|AQ|-|AP|}{|AP|}=\frac{|AQ|}{|AP|}-1$，代入得到

$$\frac{|PQ|}{|AP|}=\frac{\frac{8}{\sqrt{1+k^2}}}{\frac{8\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}}-1=\frac{1+4k^2}{1+k^2}-1=\frac{3k^2}{1+k^2}=3-\frac{3}{1+k^2},$$

令 $3-\frac{3}{1+k^2}=2$，得：$k=\pm\sqrt{2}$，代入可得：点 $P(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.所以，存在点 P 使得 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$ 成立，点 P 的坐标为 $(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.

思路2: 假设存在点 P，还可以设直线 AP 的方程为 $x=ty-4$，此时只需得到关于 t 的一个方程即可.

$\begin{cases} x=ty-4 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得：$(t^2+4)y^2-8ty=0$，由 $\Delta=64t^2>0$，得：$t\neq0$，解得：$y_p=\frac{8t}{t^2+4}$，进而得：

$$|AP|=\sqrt{1+t^2}|y_p-0|=\frac{8\sqrt{1+t^2}|t|}{t^2+4},$$

因为圆心到直线 AP 的距离为 $d=\frac{|4|}{\sqrt{1+t^2}}$，所以 $|AQ|=2\sqrt{16-d^2}=2\sqrt{\frac{16t^2}{1+t^2}}=\frac{8|t|}{\sqrt{1+t^2}}$，

因为 $\frac{|PQ|}{|AP|}=\frac{|AQ|-|AP|}{|AP|}=\frac{|AQ|}{|AP|}-1$，代入得到

$$\frac{|PQ|}{|AP|}=\frac{\frac{8|t|}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{8\sqrt{1+t^2}|t|}{t^2+4}}-1=\frac{t^2+4}{1+t^2}-1=\frac{3}{1+t^2},$$

令 $\frac{3}{1+t^2}=2$，则 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入可得：

点 $P(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.

2. 逻辑转化，优化解答

由 A、P、Q 三点共线，关系式 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$ 可化为共线向量关系 $\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AP}$，利用坐标还可以转化为 $x_Q-x_A=3(x_P-x_A)$ 或 $y_Q-y_A=3(y_P-y_A)$，可将 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$ 转化为点的横坐标之间的关系，或纵坐标之间的关系给出解答.

思路3: 假设存在点 P，设直线 AP 的方程为 $x=ty-4$.

$\begin{cases} x=ty-4 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得：$(t^2+4)y^2-8ty=0$，由 $\Delta=64t^2>0$，得：$t\neq0$，解得：$y_p=\frac{8t}{t^2+4}$；同理，直线与圆的方程联立，可得：$y_Q=\frac{8t}{t^2+1}$.由 $y_Q=3y_p$，得到关于 t 的方程为 $\frac{8t}{t^2+1}=4\times\frac{8t}{t^2+4}$，解得：$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入可得：点 $P(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.

上述过程之所以选用纵坐标之间的关系给出解答，是因为注意到点 P 与点 Q 坐标的关系中，两者纵坐标之间的关系更为简洁，求解会更加方便.也可以利用它们横坐标之间的关系给出解答，此处不再赘述.

3. 利用点坐标刻画方程关系

在研究直线与圆锥曲线的位置关系时，除了通过设置直线参量(斜率、截距等)刻画直线方程外，还可以设置点坐标作为参量，借助坐标化，将题目几何关系转化为代数关系，对问题进行探究与解答.

思路4: 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由条件可得：

$\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$，$x_2^2+y_2^2=16$，$x_2+4=3(x_1+4)$，$y_2=3y_1$

上述方程中，四个方程中有四个未知量，说明方程可得确定解.分析四个方程的代数结构，求解的关键是消元，可将 $x_2=3x_1+8$ 与 $y_2=3y_1$ 代入 $x_2^2+y_2^2=16$，得到方程 $(3x_1+8)^2+9y_1^2=16$，让其与 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$ 联立求解点 P 的坐标，可得：点 $P(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.

4. 几何转化，探究本源

解析几何，几何是根本，解析是研究手段.因此，考生在解析几何的学习中，要格外注重几何关系的分析、思考与探究.好的几何转化，不仅让问题的解答更简洁，更能揭示出问题的本源.

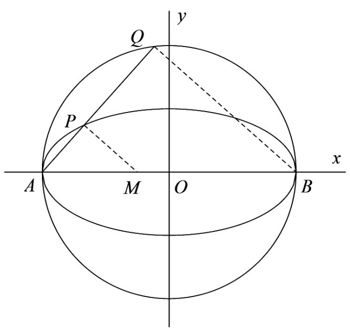

图2

思路5: 如图2，记椭圆的右顶点为 B，连接 BQ.由 AB 也是圆 O 的直径，可知 $\angle AQB=90°$，假设存在点 P 满足 $\frac{|PQ|}{|AP|}=2$，则 $\frac{|AQ|}{|AP|}=3$.若过点 P 作 $PM\parallel BQ$ 交 x 轴于点 M，可得：点 M 满足 $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$，进而可得：$M(-\frac{4}{3},0)$ 且 $\angle APM=90°$.因此，P 点可以看成是以 AM 为直径的圆与椭圆 C 的公共点.

可联立方程组 $\begin{cases} (x+\frac{8}{3})^2+y^2=\frac{16}{9} \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，解得：

点 $P(-\frac{28}{9},\pm\frac{8\sqrt{2}}{9})$.

这与思路4中的方程组其实是相同的.因此，思路4与思路5的过程可以看成是从“数”“形”两个视角对问题给出了解答.

5. 题目的引申与拓展

在题目中，还可以从运动变化的角度研究 $\frac{|PQ|}{|AP|}$ 的取值范围.利用思路1或思路2可得：$\frac{|PQ|}{|AP|}$ 的取值范围是 $(0,3)$.基于 $\frac{|PQ|}{|AP|}$ 的取值范围，还可以考查取值的特殊情形，比如满足 $\frac{|PQ|}{|AP|}=3$ 的点 P 的存在性问题.结合前面的解答易知：椭圆上不存在满足 $\frac{|PQ|}{|AP|}=3$ 的点.从解方程的视角，无解也可以看成是有限个数解，即解的个数是0.

函数与方程，是刻画变化过程中“动”态与“静”态问题的核心思想.在研究常量问题时，可将其置于所在的运动变化过程之中，从整体的视角对问题加以思考；在研究变化问题时，也要根据运动变化的特征，关注变化中的不变性、不变量，用变化中的“不变”揭示变化的本质规律.

责编/胡梦蝶 版式/罗京京 热线/59102872 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn