数学

利用二次函数强化代数推理

北京市朝阳区芳草地国际学校富力分校 陈 武

二次函数是“数与代数”知识板块中的重要内容,其学习过程体现了数形结合思想,学生在学习数与形的转化过程中可大大提升自身的代数推理能力.

聚焦学考方向 明确学习难点

近年来,北京市初中学考数学第26题均立足函数的概念、图象与性质,聚焦二次函数图象的对称性、函数的增减性,综合考查代数式运算、代数式的恒等变形、方程、不等式等代数核心知识。试题强调用数形结合的思想方法研究图形在运动中的变化规律以及变化中的不变量,并鼓励考生通过探究熟悉的数学对象产生新发现,同时引导考生从分析问题入手构建解决问题的思路与方法.

年份	考查内容	问题本质
2020	由函数值大小求对称轴取值范围	函数值比大小
2021	比较函数值大小	
2022	由函数值大小关系,求对称轴及自变量的取值范围	
2023	由函数值大小关系,求对称轴的取值范围	
2024	由函数值大小关系,求对称轴(参数)的取值范围	
2025	考查利用函数模型刻画变量之间的关系和规律	点的运动所产生的线段长度的变化

二次函数综合题作为考查代数推理能力的重要载体,对考生的符号意识、抽象能力、推理能力与运算能力提出了较高要求。这类题目表述往往较抽象,考生要准确解读题意,完成抽象符号、直观图象和代数模型之间的转化.

在作答代数综合题时,考生常会遇到以下难点:

1. 面对含参数较多的题目,难以提取有效信息与结论,无从下手.

2. 遇到含参数且不确定的函数表达式时,无法通过画图辅助解题,进而使“几何直观助力代数推理”成为泡影.

3. 在解题时,考生运用特殊值进行合情推理的能力尚可,但普遍缺乏将其一般化、符号化并完成严谨证明的能力;而对抽象数学语言及字母进行运算时,考生往往存在畏难情绪,这反映出其思维仍停留在具体运算层面,运用符号进行抽象表达与推理的能力亟待提升.

为提升解答二次函数综合题的能力,考生在日常学习中可采取以下方法:

1. 数形结合,构建解题思维. 在认真分析已知条件后,考生可以从函数表达式入手,分析二次函数的开口方向、对称轴和增减性;对于较复杂的问题,则可从特殊到一般,先解决具体数值的问题,画出函数图象,利用函数图象和性质分析、解决问题,再推广到含参数的一般情况,对代数综合问题进行求解.

2. 重视反思,提升解题能力. 考生要坚持“解后必反思”,每做完一道题都要问自己“这道题的关键步骤是什么”“我用了哪些数学思想”,并通过归纳常见题型的解题技巧,总结解决代数综合问题的一般思路和策略.

分析典型试题 总结解题思路

【例1】 在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$) 经过点 O 和点 $A(3,3a)$.

(1) 求 c 的值,并用含 a 的式子表示 b;

(2) 过点 $P(t,0)$ 作 x 轴的垂线,交抛物线于点 M,交直线 $y=ax$ 于点 N.

①若 $a=1$,$t=4$,求 MN 的长;

②已知在点 P 从点 O 运动到点 $B(2a,0)$ 的过程中,MN 的长随 OP 的长的增大而增大,求 a 的取值范围.

【解析】 本题主要考查用待定系数法求二次函数解析式、二次函数的图像与性质、二次函数与一次函数的综合应用等知识,考生解题的关键是运用数形结合和分类讨论的思想分析问题.

(1) 分别将 $O(0,0)$,$A(3,3a)$ 代入抛物线解析式,即可获得答案.

将点 $O(0,0)$ 代入,抛物线 $y=ax^2+bx+c$,可得 $c=0$.

$\therefore$ 该抛物线解析式为 $y=ax^2+bx$,

将点 $A(3,3a)$ 代入,抛物线 $y=ax^2+bx$,

可得 $3a=9a+3b$,解得 $b=-2a$.

(2) ①结合题意,分别确定点 M、N 的坐标,即可获得答案.

若 $a=1$,则该抛物线及直线解析分别为 $y=x^2-2x$,$y=x$,

当 $t=4$,可有点 $P(4,0)$. 如图1,

$\because PM\perp x$ 轴,$\therefore x_M=x_N=4$.

将 $x=4$ 代入 $y=x^2-2x$,可得 $y=4^2-2\times4=8$,即 $M(4,8)$.

将 $x=4$ 代入 $y=x$,可得 $y=4$,即 $N(4,4)$.

$\therefore MN=8-4=4$.

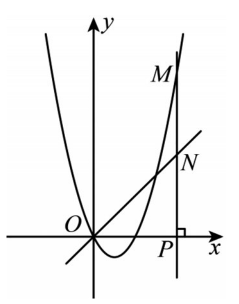

图1

②先确定 $MN=|at^2-3at|$,再分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况分析求解即可.

当点 P 从点 O 运动到点 $B(2a,0)$ 的过程中,

$\because PM\perp x$ 轴,$P(t,0)$,$\therefore x_M=x_N=t$.

将 $x=t$ 代入 $y=ax^2-2ax$,可得 $y=at^2-2at$,即 $M(t,at^2-2at)$.

将 $x=t$ 代入 $y=ax$,可得 $y=at$,即 $N(t,at)$.

$\therefore MN=|at^2-2at-at|=|at^2-3at|$.

令 $MN=0$,即 $at^2-3at=0$,解得 $t=0$ 或 $t=3$.

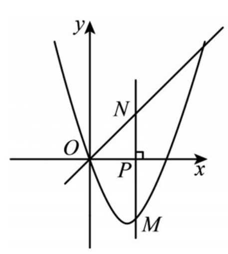

图2

若 $a>0$,可有 $2a>0$,即点 B 在 y 轴右侧,如图2,

当 $0<t\le3$ 时,可有 $MN=-at^2+3at$,其图像开口向下,对称轴为 $x=\frac{3}{2}$.

若 MN 的长随 OP 的长的增大而增大,即 MN 的长随 t 的增大而增大.

则 $2a\le\frac{3}{2}$,解得 $a\le\frac{3}{4}$.

当 $t>3$ 时,可有 $MN=at^2-3at$,其图像开口向上,对称轴为 $x=\frac{3}{2}$,不符合题意. $\therefore 0<a\le\frac{3}{4}$.

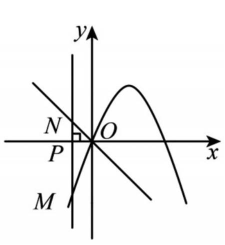

图3

若 $a<0$,可有 $2a<0$,即点 B 在 y 轴左侧,如图3,

当 $t<0$ 时,可有 $MN=-at^2+3at$,其图像开口向上,对称轴为 $x=\frac{3}{2}$.

若 MN 的长随 OP 的长的增大而增大,即 MN 的长随 t 的减小而增大.

则 $2a\le\frac{3}{2}$,解得 $a\le\frac{3}{4}$. $\therefore a<0$.

综上所述,a 的取值范围为 $0<a\le\frac{3}{4}$ 或 $a<0$.

【总结】 回顾解答过程,考生可梳理出以下解题思路:

分类讨论——画图辅助(特殊值,画图象)——列线段的函数关系式——求对称轴——描述增减性——建立不等式——确定参数的取值范围.

【例2】 在平面直角坐标系 xOy 中,已知抛物线 $y=ax^2-2a^2x$ ($a\neq0$).

(1) 当 $a=1$ 时,求抛物线的顶点坐标;

(2) 已知 $M(x_1,y_1)$ 和 $N(x_2,y_2)$ 是抛物线上的两点. 若对于 $x_1=3a$,$3\le x_2\le4$,都有 $y_1<y_2$,求 a 的取值范围.

【解析】 考生可从表示式出发,分类讨论二次函数的开口方向,并结合二次函数的对称轴分析二次函数的增减性,再画出草图,尝试分析出抛物线上点与对称轴的位置关系,利用对称性将点 M 和 N 转化到对称轴的同侧,将函数值大小转化为横坐标的大小,最后建立不等式求出参数的取值范围.

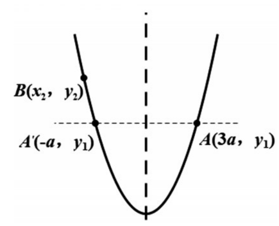

图4

(1) 将 $a=1$ 代入,

得 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(1,-1)$.

(2) $\because x=-\frac{-2a^2}{2a}=a$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=a$.

当 $a>0$ 时,开口向上,如图4.

当 $x\ge a$ 时,y 随 x 的增大而增大,

当 $x<a$ 时,y 随 x 的增大而减小.

$\because a>0$,$\therefore 3a>a$. $\therefore$ 点 $A(3a,y_1)$ 在对称轴右侧.

$\therefore$ 点 $A(3a,y_1)$ 关于对称轴直线 $x=a$ 的对称点 $A'(-a,y_1)$ 在对称轴左侧.

①当 B 在对称轴直线 $x=a$ 左侧时,

$\because y_1<y_2$,$\therefore x_2<-a$.

$\because 3\le x_2\le4$,$\therefore 4<-a$.

$\therefore a<-4$,不符合题意,舍去.

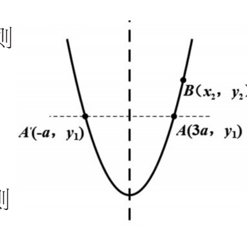

图5

②当 B 在对称轴直线 $x=a$ 右侧时,如图5,

$\because y_1<y_2$,$\therefore 3a<x_2$.

$\therefore 3\le x_2\le4$,

$\because 3a<3$. $\therefore a<1$,$\therefore 0<a<1$.

当 $a<0$ 时,开口向下,如图6,

当 $x\ge a$ 时,y 随 x 的增大而减小,

当 $x<a$ 时,y 随 x 的增大而增大.

$\because a<0$,$\therefore 3a<a$,$\therefore$ 点 $A(3a,y_1)$ 在对称轴左侧,

$\therefore$ 点 $A(3a,y_1)$ 关于对称轴直线 $x=a$ 的对称点 $A'(-a,y_1)$ 在对称轴右侧.

$\because y_1<y_2$,$\therefore 3a<x_2<-a$.

$\because 3\le x_2\le4$,$\therefore \begin{cases}3a<3\\4<-a\end{cases}$.

$\therefore a<-4$.

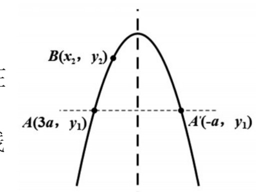

图6

综上所述:$a<-4$ 或 $0<a<1$.

【总结】 回顾解答过程,考生可梳理出以下解题思路:

分类讨论——画图辅助(开口方向,对称轴,点与轴的位置关系,求出确定位置的这一点的对称点,根据纵坐标大小确定另一个点的位置)——列关于横坐标的不等式——确定参数的取值范围.

在二次函数综合问题的解决过程中,考生要坚持“先画图、再思考”的习惯,让数形结合思想成为解题本能,将几何的直观与代数的推理相结合,让抽象的符号变得“看得见、摸得着”.

■ 责编/岳 阳 版式/罗京京 热线/59102870 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn