首都教育高质量发展·中招

数学

理解定义　总结规律　建立模型

三步突破新定义压轴题

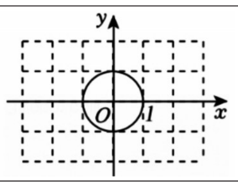
中国人民大学附属中学朝阳学校　张燕丽

新定义题型以考生已有知识为依托，引入未学过的数学概念，考查考生快速理解与应用的能力，常以压轴题形式在初中学考中呈现。下面，笔者针对这类题型中的难点，为考生提供系统性的解题突破策略。

拆解新定义题型结构

新定义题型结构呈现清晰的递进逻辑，通常分为三个层次："简单问题"聚焦对新定义的直接考查，一般通过给出具体例子考查考生对定义核心内涵的理解与判断能力；"台阶问题"在此基础上侧重新定义的初步应用，考生要归纳其一般规律，该规律为最终解决"综合问题"提供关键支撑；"综合问题"多以动点场景为载体，且难度最高，要求考生运用前述规律，结合几何性质与函数思想，推导出满足条件的字母取值范围或确定最值。

下面，笔者以2025年北京市初中学考数学第28题为例，为考生拆解该题型的具体结构。

2025年中考新定义	试题结构
在平面直角坐标 xOy 中，对于点 A 和 $\odot C$ 给出如下定义：若 $\odot C$ 上存在两个不同的点 M，N，对于 $\odot C$ 上任意满足 $AP=AQ$ 的两个不同的点 P，Q 都有 $\angle PAQ\leqslant\angle MAN$，则称点 A 和 $\odot C$ 的关联点，称 $\angle MAN$ 的大小为点 A 与 $\odot C$ 的关联角度.(本定义中的角均指锐角、直角、钝角或平角)	定义描述
(1)如图，$\odot O$ 的半径为1. ① 在点 $A_1(\frac{1}{2},0)$，$A_2(\frac{4}{3},0)$，$A_3(2,0)$ 中，点____是 $\odot O$ 的关联点且其与 $\odot O$ 的关联角度小于 90°，该点与 $\odot O$ 的关联角度为______°；	简单问题
② 点 $B(1,m)$ 在第一象限，若对于任意长度小于1的线段 BD，BD 上所有的点都是 $\odot O$ 的关联点，则 m 的最小值为______；	台阶问题
(2)已知点 $E(1,3)$，$F(4,3)$，$T(t,0)$，$\odot T$ 经过原点，线段 EF 上所有的点都是 $\odot T$ 的关联点，记这些点与 $\odot T$ 的关联角度的最大值为 α.若 $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$，直接写出 t 的取值范围.	综合问题

三维度巧解新定义题

针对新定义题型的解题难点，笔者以2025年北京市初中学考数学第28题为例，从审题技巧、规律提炼和综合应用三个维度，为考生系统讲解解题策略。

审题技巧：分类举例，理解定义

新定义对考生来说虽然陌生，但它只是给已学知识套了层"新包装"，并不可怕；而正确理解这一"新包装"的核心定义，既是考生解决后续问题的基础，也是突破新定义题型的关键。那么，考生如何精准理解新定义？核心原则是联系已有知识，将抽象定义转化为自己熟悉的语言；主要方法是举例子，考生通常可结合试题第1问同步运用这一方法，具体可分两个步骤进行。

第一步，明确定义。在第一遍读定义时，考生要圈出关键词，再通过举例让定义具象化，在举例过程中明确定义相关元素的关系，进而精准把握关键词的含义。这些关键词通常包括数学对象、限制条件和特殊词语（如"存在""任意""都有""最大""最小"等）。

第二步，深化理解定义。考生要结合定义涉及的基本概念分类举例，比如定义的主要对象是点和圆，而点和圆的位置关系分为点在圆内、点在圆上、点在圆外三类，考生要按这三类分别举例验证。

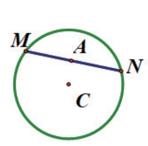


图1

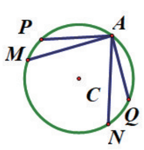


图2

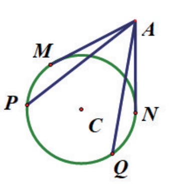


图3

以2025年北京市初中学考数学第28题为例，考生在读第一遍定义时，要圈出定义对象（点 A、$\odot C$）、相关元素（$\odot C$ 上的点 M、N 及点 P、Q）与特殊词语（"存在""任意""都有"），并明确核心条件（若 $AP=AQ$，则 $\angle PAQ\leqslant\angle MAN$）。读第二遍时，考生要转化条件，深化对定义的理解，再根据点 A 与 $\odot C$ 的位置关系画图并分类举例。为更准确地画图，考生要先分析条件：根据点 P、Q 在 $\odot C$ 上且 $AP=AQ$，可知点 P、Q 关于直线 AC 对称。对此，考生可将题目限制条件转化为：对 $\odot C$ 上的点 P、Q，若 $AP=AQ$ 则 $\angle PAQ\leqslant\angle MAN$。

由此可知，当点 A 和 $\odot C$ 确定后，P、Q 是动点，M、N 是定点，这就要求 $\angle MAN$ 是 $\angle PAQ$ 的最大值。进而，考生只要分三类画图求 $\angle PAQ$ 的最大值：如图1，当点 A 在 $\odot C$ 内时，$0<\angle PAQ\leqslant180^\circ$，因此需要使 $\angle MAN=180^\circ$，MN 为经过点 A 的任意一条弦即可；如图2，当点 A 在 $\odot C$ 上时，对任意的 M、N，总存在点 P、Q，使得 $\angle PAQ>\angle MAN$；如图3，当点 A 在 $\odot C$ 外时，$0<\angle PAQ\leqslant$ 过点 A 的两切线的夹角。

进而，考生可得到如下结论：$\odot C$ 内部的所有点都是 $\odot C$ 的关联点，关联角度为 180°；$\odot C$ 上的点都不是 $\odot C$ 的关联点；$\odot C$ 外任意一点都是 $\odot C$ 的关联点，且关联角度为过两点的两切线的夹角。

规律提炼：数形结合，总结规律

一般来说，第2问是为最后一问做铺垫的，因此我们称其为"台阶问题"。这一问不仅需要考生结合具体问题，由特殊到一般总结规律，还会涉及三种语言（文字语言、图形语言、符号语言）的转化，以及数量关系与位置关系的相互转化。

例如，在2025年北京市初中学考数学第28题的第2问中，"点 $B(1,m)$ 在第一象限（即 $m>0$），对于任意长度小于1的线段 BD，BD 上所有的点都是 $\odot O$ 的关联点"，这段文字描述可转化成图形语言：以点 B 为圆心，半径为1的 $\odot B$ 全在⊙O内或圆外；再将这一图形位置关系转化为数量关系 $BO>2$，即 $1+m^2>4$，解得 $m>\sqrt{3}$。

通过这一问，考生再次验证了此前的结论，即⊙O内部和外部的点都是⊙O的关联点。

综合运用：问题拆解，建立模型

最后一问多为动点问题，常涉及多个动点。考生解题时要运用分类讨论、数形结合、逆向思考等核心思想方法，具体可按以下步骤推进。

首先，分析动点间的联系及运动规律。以2025年北京市初中学考数学第28题第3问为例，圆心 $T(t,0)$ 为动点，其运动规律为"T 会随 t 的增大向右运动"，结合"$\odot T$ 经过圆心"的隐含条件，考生可将问题分为 $t>0$ 和 $t<0$ 两类讨论。

其次，分析限制条件，聚焦关键词。常见关键词包括"最大值""存在""所有""任意"等，本题的核心限制条件为"线段 EF 上所有点都是 $\odot T$ 的关联点""关联角度的最大值为 α，且 $90^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$"，考生要关注"所有点""最大值"这两个关键限定词。

再次，拆解问题并转化模型。对每个限制条件，考生要分别从位置关系（形）和数量关系（数）两方面分析，将抽象问题转化为可运算的数学模型（具体对应关系见下表）。求解时，考生只要找出临界情况，求出对应字母的取值，从而确定最终范围。

最后，精准求解并验证边界。计算过程中，考生要注意运算的严谨性，得出结果后检查边界值是否符合题意、是否可取，确保答案完整无误。

<table>
<tr><th colspan="2">限制条件</th><th>位置关系</th><th>数量关系</th><th>建立模型</th></tr>
<tr><td colspan="2">$T(t,0)$，$\odot T$ 经过原点</td><td>圆心 T 在 x 轴上</td><td>半径为 $|t|$</td><td rowspan="5">线段 EF 上所有点在以 T 为圆心，$|t|$ 和 $\sqrt{2}|t|$ 为半径的圆环内（含半径为 $\sqrt{2}|t|$ 的圆，不含半径为 $|t|$ 的圆上）或在以 T 为圆心，$|t|$ 为半径的圆内</td></tr>
<tr><td colspan="2">线段 EF 上所有点都是 $\odot T$ 的关联点</td><td>线段 EF 上所有点在 $\odot T$ 内部或外部</td><td>所有点到圆心 T 的距离不等于半径 $|t|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">关联角的最大值为 α</td><td colspan="2">离圆心 T 越近，关联角越大</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$90^\circ\leqslant\alpha\leqslant180^\circ$</td><td>$\alpha=90^\circ$</td><td>关联点在以 T 为圆心，$\sqrt{2}|t|$ 为半径的圆上</td><td>关联点到圆心 T 的距离等于 $\sqrt{2}|t|$</td></tr>
<tr><td>$\alpha=180^\circ$</td><td>关联点在以 T 为圆心，$|t|$ 为半径的圆上及内部</td><td>关联点到圆心 T 的距离小于 $|t|$</td></tr>
</table>

梳理易错点　掌握应对策略

1. 当遇到读不懂的新定义，考生可圈出定义中的关键词，至少阅读三遍；同时结合第1问，给定义中的对象赋值或设定特殊位置，通过举例深化对定义的理解。

2. 当找不到规律时，考生在解答第1问和第2问的过程中，可尝试将问题一般化，如将具体角度变为任意角度，将具体点的位置拓展到一类位置（如点在圆上、点在圆外）。

3. 寻找综合问题的思考起点和突破口时，考生可联系上一问的结论，将当前问题转化为上一问的问题或已会解决的问题；也可简化问题，比如减少变量或固定部分变量，从特殊情况入手或从正、反两方面思考问题。

责编/苗露　版式/高薪　热线/59102870　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn