首都教育高质量发展·高招

数学

三步突破解析几何运算关

北京市朝阳外国语学校 杨茂

“解析几何”被誉为连接代数与几何的桥梁,许多考生在学习过程中感到困难重重:计算烦琐、思路不清,特别是遇到“不对称”问题时考生更是无从下手.下面就为考生讲解如何系统性地攻克这些难点.

破局:重新认识解析几何——从“算数”到“思维”

很多考生把解析几何简单地理解为“代入公式疯狂计算”,甚至总结出所谓的“硬解定理”,这是第一个认知误区.解析几何的核心思想是“用代数方法研究几何问题”,这意味着几何定性,代数定量,考生在做题之前要先思考:

1.这道题的几何背景是什么?(是圆的问题,还是椭圆的性质,涉及了哪些几何定理?)

2.题目中的几何条件如何转化为代数方程?(垂直→斜率乘积为−1或向量点积为0;相切→判别式为0或圆心到直线距离等于半径)

3.计算目标是什么?(是求一个点的坐标,还是一条直线的方程,或者仅是证明一个恒成立的结论?)

在认识解析几何时,考生要做到思维导图先行,动笔计算在后.拿到题目后考生不要急着设未知数,可以先花1至2分钟在草稿纸上画出草图,标出已知条件,厘清楚图形中各个元素的关系,想清楚大致解题路径,这样就可以避免陷入无效计算的泥潭.

优化运算:算得巧比算得快更重要

运算是解析几何的骨架,优化运算的核心在于“设而不求,整体代换”.

1. 直线方程的合理选择

根据已知条件,灵活选择直线方程的形式能极大简化计算.

点斜式: $y-y_0=k(x-x_0)$ 最常用,但考生要注意讨论斜率 k 不存在的情况.

斜截式: $y=kx+b$,当已知截距时考生可使用.

两点式: 考生要尽量避免直接使用,通常需转化为点斜式.

截距式: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,在与面积、截距相关的问题中优势明显.

参数式: 对于过定点 $P(x_0,y_0)$ 的直线,可设:$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x_0+t\\y=y_0+kt\end{cases}$($t$ 为参数).

优点: 考生若将直线上点的坐标统一用一个参数 t 表示,代入二次曲线方程后,关于求解 t 的方程根与系数关系(韦达定理)会非常简洁,尤其适用于求弦长、中点弦等问题.

2.“设而不求”与“整体代换”

这是解析几何运算的灵魂,当你设出多个未知量时,你的目标不一定是把它们一个个都解出来,而是将它们看作一个整体,寻找之间的关系,并利用这种关系直接得到最终结果.

3. 利用几何性质简化计算

求弦长时,考生除了用 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$,也可以用 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$;涉及中点时,考生可使用“点差法”;涉及角平分线、垂直等,考生可使用向量法(点乘、叉乘)或斜率关系.

攻克难点:不对称问题的处理——“化不对称为对称”

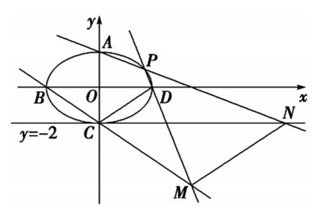
不对称问题是考生最头疼的问题,其题目中给出的条件或所求结论在变量间不对称,无法直接利用韦达定理处理.考生可以创造对称,或利用对称性的思想来解题.

下面以2023年高考数学北京卷第19题为例.

【例1】 椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,离心率 $e=\frac{\sqrt5}{3}$,点 A、C 分别为 E 的上、下顶点,点 B、D 分别为 E 的左、右顶点,$|AC|=4$.

(1)求椭圆 E 的解析式;

(2)点 P 为第一象限内椭圆上的一个动点,直线 PD 与 BC 交于点 M,直线 PA 与直线 $y=-2$ 交于点 N,求证:$MN\parallel CD$.



解析:(1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$(解析略)

(2)**方法1:** 设点 $p(x_0,y_0)$,$x_0>0$,$y_0>0$,且 $4x_0^2+9y_0^2=36$,

设直线 PD 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$,直线 BC 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$,联立可得 $M(\frac{-6x_0+9y_0+18}{2x_0+3y_0-6},\frac{-12y_0}{2x_0+3y_0-6})$.

直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$,与直线 $y=-2$ 联立可得 $N(\frac{-4x_0}{y_0-2},-2)$,所以

$$k_{MN}=\frac{\frac{-12y_0}{2x_0+3y_0-6}+2}{\frac{-6x_0+9y_0+18}{2x_0+3y_0-6}-\frac{-4x_0}{y_0-2}}=\frac{6y_0^2-4x_0y_0+8x_0-24}{-8x_0^2-9y_0^2-6x_0y_0+12x_0}$$

$$=\frac{6y_0^2-4x_0y_0+8x_0-24}{2(9y_0^2-36)-9y_0^2-6x_0y_0+12x_0}=\frac{6y_0^2-4x_0y_0+8x_0-24}{9y_0^2-6x_0y_0+12x_0-72}$$

$$=\frac{2}{3}=k_{CD}$$

于是可得 $MN\parallel CD$.

分析: 考生通过审题不难发现本题其实是一个单动点问题,由于点 P 的运动产生出点 M,N,最终研究 $MN\parallel CD$.考生只需用点 P 的坐标表示出点 M,N 的坐标后再表示出 k_{MN} 即可判断出相应关系,这样的运算量相对较小,但考生需关注运算的灵活性,可通过 $4x_0^2+9y_0^2=36$ 将 k_{MN} 形式中的非对称结构转化为对称结构,从而得到最终的数值.

方法2:

设点 $p(x_0,y_0)$,$x_0>0$,$y_0>0$,且 $4x_0^2+9y_0^2=36$,

设直线 PD 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$,直线 BC 的方程为 $y=-\frac{2}{3}x-2$,联立可得 $M(\frac{-6x_0+9y_0+18}{2x_0+3y_0-6},\frac{-12y_0}{2x_0+3y_0-6})$.

直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$,与直线 $y=-2$ 联立可得 $N(\frac{-4x_0}{y_0-2},-2)$,

$$x_M-\frac{x_N}{2}=\frac{-6x_0+9y_0+18}{2x_0+3y_0-6}+\frac{2x_0}{y_0-2}$$

$$=\frac{-3(2x_0-3y_0-6)(y_0-2)+2x_0(2x_0+3y_0-6)}{(2x_0+3y_0-6)(y_0-2)}$$

其中 $-3(2x_0-3y_0-6)(y_0-2)+2x_0(2x_0+3y_0-6)$

$=-6x_0(y_0-2)+9(y_0^2-4)+4x_0^2+2x_0(3y_0-6)$

$=4x_0^2+9y_0^2-36=0$

所以有 $|MC|=|MN|$,又 $k_{CN}=0$,所以有 $k_{MN}+k_{CM}=0$,即 $k_{MN}+k_{CB}=0$.

由椭圆的对称性可得 $k_{CD}+k_{CB}=0$,从而 $k_{MN}=k_{CD}$,故而可得 $MN\parallel CD$.

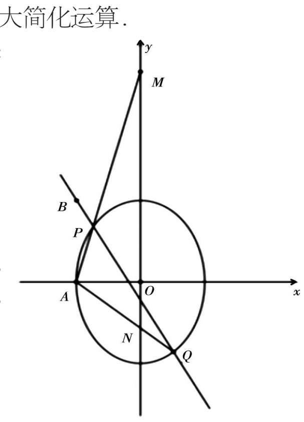
分析: 方法2结合图形特点挖掘点之间的位置关系,利用几何特征最终得到 $MN\parallel CD$ 的证明.在算法上,方法2较方法1更优化,数形结合贯穿其中.

参数方程在新教材中只是呈现在习题中,但其作用不容忽视,考生运用好它可以大大简化运算.

【例2】 已知椭圆 C:$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt5}{3}$,点 $A(-2,0)$ 在 C 上.

(1)求 C 的方程;

(2)过点 $B(-2,3)$ 的直线 l 交 C 于 P,Q 两点,直线 AP,AQ 与 y 轴的交点分别为 M,N,证明:线段 MN 的中点为定点.



解析:(1)$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$

(2)**方法1:** 设直线 l 的方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\theta\\y=3+t\sin\theta\end{cases}$,代入 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$ 可得:

$(4+5\cos^2\theta)t^2+12(2\sin\theta-3\cos\theta)t+36=0$,

设 $P(-2+t_1\cos\theta,3+t_1\sin\theta)$,$Q(-2+t_2\cos\theta,3+t_2\sin\theta)$,

$\therefore t_1+t_2=-\frac{12(2\sin\theta-3\cos\theta)}{4+5\sin^2\theta}$,$t_1t_2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$

直线 AP,AQ 的方程分别为

$y=\frac{3+t_1\sin\theta}{t_1\cos\theta}(x+2)$,$y=\frac{3+t_2\sin\theta}{t_2\cos\theta}(x+2)$,

令 $x=0$,得 M,N 中点的纵坐标

$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{3+t_1\sin\theta}{t_1\cos\theta}+\frac{3+t_2\sin\theta}{t_2\cos\theta}=\frac{3(t_1+t_2)}{t_1t_2\cos\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{3\cos\theta-2\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=3$$

所以线段 MN 的中点为定点(0,3).

方法2: 设 $P(2\cos2\theta,3\sin2\theta)$,$Q(2\cos2\alpha,3\sin2\alpha)$,$A(-2,0)$,

$k_{AP}=\frac{3\sin2\theta}{2\cos2\theta+2}=\frac{3}{2}\tan\theta$,$k_{AQ}=\frac{3\sin2\alpha}{2\cos2\alpha+2}=\frac{3}{2}\tan\alpha$,

故直线 AP,AQ 的方程分别为 $y=\frac{3}{2}(x+2)\tan\theta$,$y=\frac{3}{2}(x+2)\tan\alpha$,

令 $x=0$,得 M,N 中点的纵坐标 $\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{3}{2}(\tan\theta+\tan\alpha)$

又 B,P,Q 三点共线,所以 $\overrightarrow{BP}\parallel\overrightarrow{BQ}$,

因为 $\overrightarrow{BP}=(2\cos2\theta+2,3\sin2\theta-3)$,

$\overrightarrow{BQ}=(2\cos2\alpha+2,3\sin2\alpha-3)$

所以 $(2\cos2\theta+2)(3\sin2\alpha-3)=(2\cos2\alpha+2)(3\sin2\theta-3)$,

化简得 $(\tan\theta-1)^2=(\tan\alpha-1)^2$,

所以有 $(\tan\theta-1)+(\tan\alpha-1)=0$,即 $\tan\theta+\tan\alpha=2$

故 $\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{3}{2}(\tan\theta+\tan\alpha)=\frac{3}{2}\times2=3$.

所以线段 MN 的中点为定点(0,3).

总之,考生突破解析几何可遵循以下步骤:

1.养成好习惯,审题→画图→定性→转化→计算→检验;

2.掌握核心技巧,设而不求、整体代换、点差法、合理设参;

3.突破高阶难点,对于不对称问题,勇敢地尝试“设点法”.

责编/胡梦蝶 版式/高薪 热线/59102872 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn