首都教育高质量发展·中招

数学

解锁圆的切线解题技巧

北京师范大学三帆中学朝阳学校　蔡宏杰

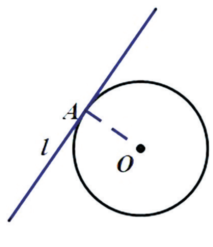
近五年初中学考中，对圆的考查通常以填空题或解答题形式出现。其中，圆的切线是圆模块的高频核心考点，对其考查集中于切线的判定与性质，且常与全等三角形、相似三角形等知识综合命题，这类解答题难度相对较高，是拉开分数差距的关键题型。结合其命题规律，笔者梳理了圆的切线相关题型及其考查知识点。

聚焦核心：圆的三大定理深度探究

切线的判定定理

判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

证明方法：若想证明一条直线是圆的切线时，考生在解题时通常可以有两种思路。



一是当直线与圆有一个公共点时，考生可连接圆心与该公共点，再证明直线垂直于这条半径——这是学考切线判定题中最常用的思路。例如，若题目明确给出“直线 l 与圆 O 交于点 A”，则点 A 为直线与圆的公共点，考生可直接连接半径 OA，通过角度推导证明 $OA\perp l$，即可完成切线判定。

二是当直线与圆的公共点未明确给出时，考生解题时可过圆心作该直线的垂线，再证圆心到直线的距离等于半径。这种情况在学考试题中并不常见，但一旦出现，往往会成为考生的失分点。

在实际解题中，当直线与圆有一个公共点时，考生可先连接圆心与该公共点得到半径，而判定该直线为圆的切线的核心，就是证明这条半径与直线垂直。常用的证明思路有以下三种：一是利用直角三角形两锐角互余的性质，如结合等腰三角形性质，推导半径与直线的夹角为90°；二是利用平行线的传递性转化垂直关系，若已知一条直线垂直于半径，且待证直线与该直线平行，则待证直线也垂直于半径；三是利用全等三角形对应角相等，证明待证角与直角相等，从而得出半径与直线垂直的结论。

切线的性质定理

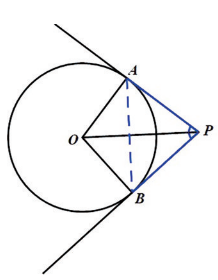
性质定理：圆的切线垂直于过切点的半径。

定理说明：这一定理是连接“切线”与“直角”的桥梁，也是构造直角三角形的重要依据。当题目中明确给出“直线 l 是圆 O 的切线，切点为 A”时，考生可联想到连接 OA，进而得出 $OA\perp l$，再构造出直角三角形，该直角三角形是后续运用勾股定理（计算线段长度）解题的基础。

切线长定理

定理内容：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

定理说明：该定理提供两个核心结论：一是线段相等（如从点 P 引圆 O 的切线 PA、PB，则 $PA=PB$）；二是某条线是角平分线（如若 PO 平分 $\angle APB$，那么 PO 也平分 $\angle AOB$）。这两个结论是证明线段相等、角相等以及构造全等三角形的关键。



在证明线段相等时，若待证线段是从同一点引圆的两条切线，考生可直接利用切线长定理，无需再通过全等或等腰三角形推导；在证明角相等时，考生可利用切线长定理中 PO 平分 $\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 的结论，再结合图中圆周角定理、等腰三角形性质等进行角度转换。

拆解习题：掌握解题核心技巧

【例1】已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 AC 为直径的半圆 O 交 AB 于 F，E 是 BC 的中点．求证：直线 EF 是半圆 O 的切线．

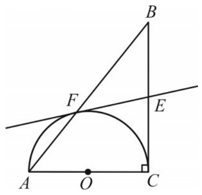


图1

【解析】本题明确直线与圆有一个公共点，考生可先连接圆心 O 与该公共点 F，再证明直线垂直于这条半径 OF，即可完成切线判定。如图1所示，考生可先连接 FC、OF，由“直径所对的圆周角为直角”得到 $FC\perp AB$；再根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”得到 $EF=EC$；由等腰三角形性质，结合 $\angle FCA+\angle FCE=90°$，通过等量代换得出 $\angle CFO+\angle CFE=90°$，即 $OF\perp EF$，从而证明直线 EF 是半圆 O 的切线。

【详解】

解：连接 FC、OF，如图2所示，

$\because AC$ 是圆 O 的直径，

$\therefore \angle AFC=90°$，

$\because E$ 是 BC 的中点，

$\therefore EF=EC$，

$\therefore \angle EFC=\angle ECF$，

$\because OF=OC$，

$\therefore \angle OFC=\angle OCF$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，

则 $\angle FCA+\angle FCE=90°$，

$\therefore \angle CFO+\angle CFE=90°$

$\therefore \angle OFE=90°$，即 $OF\perp EF$，

$\because OF$ 是 $\odot O$ 半径，

$\therefore$ 直线 EF 是半圆 O 的切线．

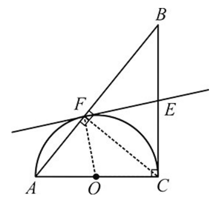


图2

【思路点拨】本题为考生示范了“连半径，证垂直”的完整过程。考生要注意，做此类题若已知直径，要联想到圆周角定理的推论——直径所对的圆周角是直角，进而得到直角三角形，再利用直角三角形的相关性质解题。若已知一条线段的中点，考生可联想到直角三角形中的有关性质，将该中点与直角顶点连接，即可根据“直角三角形斜边中线等于斜边的一半”，得出“连接线段等于该线段一半”的结论。若直接证明垂直有困难，考生要学会利用等腰三角形的性质进行角度转换，这是证明两线垂直的高效技巧。

【例2】如图3，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，E 为 AB 上的一点，$DE=DC$，以 D 为圆心，DB 长为半径作 $\odot D$，$AB=10$，$EB=6$．

求证：AC 是 $\odot D$ 的切线．

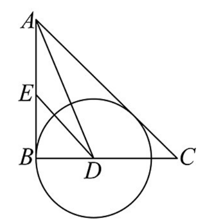


图3

【解析】考生可过点 D 作 $DF\perp AC$ 于 F，根据 $\angle B=90°$ 和角平分线的性质，可得 $BD=DF$，进而证得题干所需结论。

【详解】

解：过点 D 作 $DF\perp AC$ 于 F，如图4所示，

$\because \angle B=90°$，

$\therefore AB\perp BC$，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$DF\perp AC$，

$\therefore BD=DF$，

$\therefore AC$ 是 $\odot D$ 的切线．

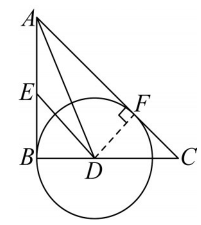


图4

【思路点拨】本题为考生提供了“无公共点，作垂直证半径”的解题范例。当题目中有角平分线时，考生要联想到角平分线的性质，作出角另一边的垂线，进而得到相等线段——角平分线常与“作垂直”和“证距离相等”紧密相连。考生能否准确作出点 D 到 AC 的垂线段 DF 是解开本题的关键。在平时练习中，考生要训练由已知条件能直接推导辅助线作法的能力——这类辅助线作法虽不常用，但也需掌握。

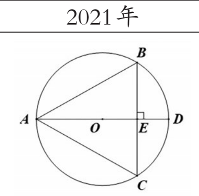
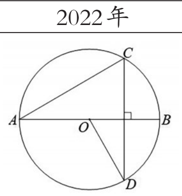
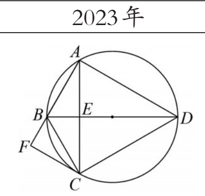
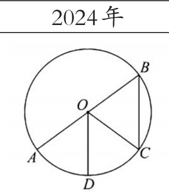
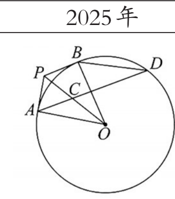
考点延伸

近五年学考圆的综合题核心考查方向如下：一是圆的直接关联知识点，例如圆心角、弧、弦的关系、垂径定理、切线的判定与性质；二是综合关联知识点，例如结合三角形相关知识综合考查，涉及全等、相似（九年级第二学期内容）、等边三角形、解直角三角形（九年级第二学期内容）等内容。

表一：近5年学考试题中对圆的知识点考查分布

2021年	2022年	2023年	2024年	2025年
第13题 2分 第24题 6分	第24题 6分	第15题 2分 第24题 6分	第14题 2分 第24题 6分	第24题 6分

表二 近5年学考第24题对圆的知识点考查内容

	2021年	2022年	2023年	2024年	2025年
					
第(1)问考查知识	垂径定理 等弧对等圆周角	垂径定理 圆心角、圆周角	等弧对等圆周角 直径所对圆周角是直角	圆心角、圆周角	切线长定理 圆周角
第(2)问考查知识	相似	切线判定定理	特殊角	相似	相似

责编/苗 露　版式/高 薪　热线/59102870　邮箱/kaoshibao@bjeea.cn