首都教育高质量发展·高招

数学

函数与导数、三角函数的解题技巧

北京市第六十六中学 贺雪姣

函数是高中数学的“生命线”，贯穿函数与导数、三角函数、解析几何等核心板块，在高考中占比较大，既是考查重点也是考生复习的“痛点”。一轮复习中，不少考生在函数问题上频频遇阻。为助力考生精准破解这些难题，本文聚焦“函数与导数”“三角函数”两大模块，通过典型例题拆解、难点分析与突破策略，帮助考生吃透函数本质，掌握解题技巧。

函数与导数：突破“工具应用”与“本质理解”的壁垒

函数与导数是高考压轴题的高频载体，主要考查“导数工具性”与“函数本质性”的融合。考生在复习时需围绕“单调性分析”“几何意义应用”“极值最值求解”三大高频题型，拆解运算与逻辑难点。

一、函数单调性与导数的深度结合

单调性是函数的核心性质，导数是判断单调性的“利器”，但考生易在“求导规范”“定义域限制”“不等式转化”处出错，需通过流程化训练来突破。

【典型例题】讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ 的单调性。

解题步骤：

1. 确定定义域：$x>-1$ 是分析单调性的前提；

2. 求导运算：

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)-\ln(1+x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

3. 分析导数符号：令 $f'(x)=0$，即 $1-\ln(1+x)=0$，解得 $x=e-1$（因 $\ln t=1$ 时 $t=e$，故 $1+x=e$）；

当 $-1<x<e-1$ 时，$\ln(1+x)<1$，故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x>e-1$ 时，$\ln(1+x)>1$，故 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

考生常遇难点：

1. 考生求导运算不规范，尤其是复合函数与商的求导法则结合时，易出现分子或分母的导数计算错误。

2. 考生对定义域的限制重视不足，分析单调性时易忽略 $x>-1$ 的前提。

3. 考生不能灵活地将对导数符号的分析转化为对数不等式的求解，对“$\ln t=1$ 时 $t=e$”这类基本对数方程的转化不熟练。

突破策略：

1. 强化“求导—找零点—分区间—判符号”四步流程，每步需标注关键注意点（如检查公式、确认定义域）。

2. 针对对数、指数函数，专项复习“$\ln t=a\Leftrightarrow t=e^a$”“$e^t=a\Leftrightarrow t=\ln a$”等基本转化。

3. 用错题本总结求导常见错误（如符号错误、链式法则遗漏），每周复盘1次。

二、导数几何意义的综合应用

导数的几何意义是“切线斜率”，高考试题常结合“曲线与切线位置关系”来考查。考生易在“几何问题代数化”“辅助函数构造”处卡壳。

【典型情境】已知函数 $f(x)$ 在点 $A(a,f(a))\,(a\neq0)$ 处的切线为 l_1，除 A 外，曲线 $y=f(x)$ 均在 l_1 上方，分析函数与切线的关系。

解题关键： 考生要将“曲线在切线上方”转化为 $f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]>0$ 对 $x\neq a$ 恒成立，进而构造函数 $g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$，通过研究 $g(x)$ 的单调性与极值，判断其符号。

考生常遇难点：

1. 考生将几何问题转化为代数问题的能力不足，难以将“曲线在切线上方”精准转化为函数不等式。

2. 构造辅助函数后，考生对其导数的分析（如 $g'(x)=f'(x)-f'(a)$）缺乏方向，不会利用 $g(a)=0$ 且 $g'(a)=0$ 的特点研究函数形态。

3. 考生对“恒成立”与“存在性”问题的逻辑关系理解不深，导致证明过程不严谨。

突破策略：

1. 考生可结合“切线与曲线位置关系”例题，训练“几何条件→代数表达式”的转化，如“切线下方”对应“切线方程 $f(x)$ −切线方程 <0”。

2. 涉及“函数与切线/割线比较”时，考生可构造辅助函数“$g(x)=f(x)-$（切线/割线方程）”。

3. 考生可强化“极值与恒成立”的关联：若 $g(x)$ 在定义域内仅有一个极值点 $x=a$，且 $g(a)=0$，则 $g(x)>0$ 恒成立等价于“$x=a$ 是极小值点”。

三、导数与函数极值、最值的综合应用

极值与最值是导数的核心应用，尤其在含参数的函数问题中，考生易在“参数分类标准”“极值与最值混淆”处出错，需通过分类讨论训练来突破。

【典型例题】已知函数 $f(x)=x^3-3ax+2\,(a\in R)$，求其在区间 $[0,2]$ 上的极值与最值。

解题步骤：

1. 求导找驻点：$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$，驻点为 $x=\sqrt{a}$ 或 $x=-\sqrt{a}$（$a\geq0$，$a<0$ 时无实驻点）。

2. 分类讨论参数 a。

• 当 $a\leq0$ 时：$f'(x)\geq0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 单调递增，无极值；最值为 $f(0)=2$（最小值）、$f(2)=8-6a$（最大值）；

• 当 $0<a<4$ 时：驻点 $x=\sqrt{a}\in(0,2)$，$x=-\sqrt{a}$ 舍去；

（1）单调性：$x\in\left[0,\sqrt{a}\right)$ 时 $f'(x)<0$（递减），$x\in\left(\sqrt{a},2\right]$ 时 $f'(x)>0$（递增）；

（2）极值：$x=\sqrt{a}$ 处取极小值 $f(\sqrt{a})=2-2a\sqrt{a}$（无极大值）；

（3）最值：比较极小值与端点值，若 $a\leq2$，最小值为 $2-2a\sqrt{a}$，最大值为 $8-6a(a\leq1)$ 或 $2(1<a\leq2)$；若 $a>2$，最小值为 $8-6a$，最大值为2；

• 当 $a\geq4$ 时：$f'(x)\leq0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 单调递减，无极值；最值为 $f(2)=8-6a$（最小值）、$f(0)=2$（最大值）。

突破策略：

1. 考生要建立参数讨论三步法。

（1）找驻点（含参数）；

（2）按驻点是否在定义域/区间内划分参数范围；

（3）各范围下分析单调性与极值。

2. 考生要强化“极值≠最值”的意识，要进行端点值比较。

三角函数：突破“公式应用”与“模型构建”的瓶颈

三角函数考查考生的公式运用灵活度与逻辑推理能力，核心题型包括“公式化简”“解三角形”“性质分析”。考生需逐一拆解公式，解决情境转化难点。

一、三角函数性质与图象的综合分析

三角函数性质（周期、单调性、零点）常结合图象进行考查，考生易在“化简不规范”“周期判断错误”处出错，需通过“化一训练＋图象辅助”来突破。

【典型例题】函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x\,(\omega>0)$，若 $f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立，且 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点，求 ω 的最小值。

解题步骤：

1. 化简函数：考生可用辅助角公式化简为“$A\sin(\omega x+\varphi)$”形式，$f(x)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$（因 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$）；

2. 分析周期：由 $f(x+\pi)=f(x)$ 知周期 $T\leq\pi$，故 $\frac{2\pi}{\omega}\leq\pi$，得 $\omega\geq2$；

3. 找零点条件：令 $f(x)=0$，解得 $\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in Z)$；

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $0\leq\dfrac{k\pi-\frac{\pi}{4}}{\omega}\leq\dfrac{\pi}{4}$；当 $k=1$ 时，$\dfrac{\pi-\frac{\pi}{4}}{\omega}\leq\dfrac{\pi}{4}$，即 $\dfrac{3\pi}{4\omega}\leq\dfrac{\pi}{4}$，得 $\omega\geq3$；综上，ω 最小值为3。

考生常遇难点：

1. 考生不会用辅助角公式化简，直接分析 $\sin\omega x+\cos\omega x$ 的性质，增加难度；

2. 考生误将“$f(x+\pi)=f(x)$”理解为“周期为 π”，忽略“周期 $\leq\pi$”的逻辑；

3. 考生零点条件转化不熟练，不会将“$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$”转化为关于 ω 的不等式。

突破策略：

1. 强化“化一训练”：练习“$\sin\alpha+\cos\alpha$”“$a\sin\alpha+b\cos\alpha$”化简题，熟练辅助角公式；

2. 结合单位圆/图象分析性质：周期用“相邻零点间距”“最值间距”判断，零点用“$\sin\theta=0$ 的解”对应；

3. 总结“性质分析模板”：先化简—求周期—找零点/单调区间—结合范围求参数。

关于函数相关问题的突破，核心在于理解本质、规范流程、专项训练。函数与导数需紧抓“导数工具性”，考生可通过“分类讨论与辅助函数构造”化解参数与逻辑难点；三角函数需夯实“公式应用”，考生可通过建模训练打通情境与代数的壁垒。一轮复习中，笔者建议考生针对每类题型整理“例题—难点—策略”笔记，每周进行针对性训练，逐步形成解题思维惯性。

责编/胡梦蝶 版式/罗京京 热线/59102872 邮箱/kaoshibao@bjeea.cn